数理解析研究所講究録
527巻 1984年 26-43

Noncausal確率積分のL^2-理論（I）

富山大・理　関口　健（Takeshi Sekiguchi）
秋田大・教育　塩田安信（Yasunobu Shiota）

本稿ではnoncausal確率積分についてのロシア学派の研究（L^2-理論）の解説およびこれらの研究と小川氏によるnoncausal確率積分の関連について述べる。

§1. 準備.

1. $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ を $L^2(X)$ がseparableなmeasure spaceとし，Wを$\mathfrak{X}$上のGaussian random measureで $E[\{W(dx)\}^2] = \mu(dx)$ なるものとする。即ち，

i) $\{W(A); A \in \mathfrak{X}\}$ はあるprobability space $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上のGaussian random system,

ii) $\forall A \in \mathfrak{X}$ に対して $E[W(A)] = 0$, $E[\{W(A)\}^2] = \mu(A)$,

iii) $A, B \in \mathfrak{X}$ が $A \cap B = \phi$ ならば $W(A \cup B) = W(A) + W(B)$。

2. normalized Hermite polynomials:

$$H_p(x) = (-1)^p \frac{1}{\sqrt{p!}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^p}{dx^p} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad p = 0, 1, 2, \cdots, \ x \in \mathbb{R}.$$

性質.

1) $e^{-\lambda^2+\sqrt{2}\lambda x} = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p \sqrt{\frac{2^p}{p!}}\, H_p(x)$,

2) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} H_p(x) H_q(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \begin{cases} 1, & p = q, \\ 0, & p \neq q, \end{cases}$

3) $H_p(x) H_q(x) = \sqrt{p!\,q!} \sum_{j=0}^{p\wedge q} \left\{ \sqrt{(p+q-2j)!} \,/\, j!\,(p-j)!\,(q-j)! \right\} H_{p+q-2j}(x)$.

3. multiple Wiener integrals. $\{\varphi_n\}$ を CONS in $L^2(X)$ とする。

1) (Cameron-Martin) $\{\prod_{j=1}^{k} H_{p_j}(\int \varphi_{n_j}(x) W(dx))$; $(n_1, \cdots, n_k)$, $(p_1, \cdots, p_k)$, $\sum_{j=1}^{k} p_k = p$, $p = 0, 1, 2, \cdots\}$ は CONS in $L^2(\Omega)$.

2) $\widehat{L}^2(X^p) = \{\hat{f}(x_1, \cdots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(p)})\, ;\, f \in L^2(X^p)\}$

とおく。このとき,

$$\left\{ \sqrt{\frac{p!}{p_1! \cdots p_k!}}\, \varphi_{n_1}^{\hat{\otimes} p_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varphi_{n_k}^{\hat{\otimes} p_k}(x_1, \cdots, x_p)\, ; \right.$$

$$\left. (n_1, \cdots, n_k), (p_1, \cdots, p_k), \sum_{j=1}^{k} p_j = p,\ p = 0, 1, 2, \cdots \right\}$$

は CONS in $\widehat{L}^2(X^p)$. ここで $\hat{\otimes}$ は tensor 積を表わす。

3) operator を

$$\frac{1}{\sqrt{p!}} \int\cdots\int \sqrt{\frac{p!}{p_1! \cdots p_k!}}\, \varphi_{n_1}^{\hat{\otimes} p_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varphi_{n_k}^{\hat{\otimes} p_k}(x_1, \cdots, x_p)$$

$$= H_{p_1}(\int \varphi_{n_1}(x) W(dx)) \cdot \cdots \cdot H_{p_k}(\int \varphi_{n_k}(x) W(dx))$$

で定めるとこの operator は $\widehat{L}^2(X^p)$ から $L^2(\Omega)$ への operator に拡張される。これを p 次 multiple Wiener integral と呼び

$$\int\cdots\int f(x_1, \cdots, x_p) W(dx_1) \cdots W(dx_p), \quad f \in \widehat{L}^2(X^p)$$

で表わす。

4. multiple Wiener integrals の性質.

$\mathcal{H}(\Omega)=L^2(\Omega)$, $\mathcal{H}_p(\Omega)=p$ 次 multiple Wiener integral 全体, ただし $\mathcal{H}_0(\Omega)=\mathbb{R}$

とおく。以下のことは良く知られている:

1)(Ito-Wiener 展開) $\mathcal{H}(\Omega)=\sum_{p=0}^{\infty}\oplus\mathcal{H}_p(\Omega)$.

2)(Fubini 型公式) $f(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_p)\in L^2(X^{k+p})$, $g(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_q)\in L^2(X^{k+q})$ とすると

$$\int\cdots\int\Big[\frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma}\int\cdots\int f(x_1,\cdots,x_k,y_{\sigma(1)},\cdots,y_{\sigma(p)})\,g(x_1,\cdots,x_k,y_{\sigma(p+1)},\cdots,y_{\sigma(p+q)})\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_k)\Big]W(dy_1)\cdots W(dy_{p+q})$$

$$=\int\cdots\int\Big[\int\cdots\int\frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma}f(x_1,\cdots,x_k,y_{\sigma(1)},\cdots,y_{\sigma(p)})\,g(x_1,\cdots,x_k,y_{\sigma(p+1)},\cdots,y_{\sigma(p+q)})W(dy_1)\cdots W(dy_{p+q})\Big]\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_k).$$

3)(積公式) $f\in\widehat{L}^2(X^p)$, $g\in\widehat{L}^2(X^q)$ とすると

$$\int\cdots\int f(x_1,\cdots,x_p)W(dx_1)\cdots W(dx_p)\cdot\int\cdots\int g(x_1,\cdots,x_q)W(dx_1)\cdots W(dx_q)$$

$$=\sum\frac{p!\,q!}{j!\,(p-j)!\,(q-j)!}\int\cdots\int\Big[\int\cdots\int f(x_1,\cdots,x_j,y_1,\cdots,y_{p-j})\cdot g(x_1,\cdots,x_j,y_{p-j+1},\cdots,y_{p+q-2j})W(dy_1)\cdots W(dy_{p+q-2j})\Big]\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_j).$$

§2. Stochastic derivatives.

1. $k=0,1,2,\cdots$ に対して

$\mathcal{H}(X^k\times\Omega)=L^2(X^k\times\Omega)$,

$\mathcal{H}_p(X^k\times\Omega)=\{\int\cdots\int f(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_p)W(dy_1)\cdots W(dy_p);$
$f\in L^2(X^{k+p}),\ f(x_1,\cdots,x_k;\cdot)\in\widehat{L}^2(X^p)\}$,

$$\mathcal{H}_{finite}(X^k\times\Omega)=\bigcup_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\oplus\mathcal{H}_p(X^k\times\Omega)$$

とおく。ただし $X^0\times\Omega=\Omega$ と考える。Ito-Wiener 展開より

$$\mathcal{H}(X^k\times\Omega)=\sum_{p=0}^{\infty}\oplus\mathcal{H}_p(X^k\times\Omega).$$

以後, この展開を次のように表わす: $F\in\mathcal{H}(X^k\times\Omega)$ に対して

$$F(x_1,\cdots,x_k)=\sum_{p=0}^{\infty}F_p(x_1,\cdots,x_k)$$
$$=\sum_{p=0}^{\infty}\int\cdots\int f_p(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_p)W(dy_1)\cdots W(dy_p).$$

G も同様に表わされているとすると, $\mathcal{H}(X^k\times\Omega)$ における内積は

$$(F,G)_{\mathcal{H}(X^k\times\Omega)}$$
$$=\sum_{p=0}^{\infty}E\left[\int\cdots\int F_p(x_1,\cdots,x_k)G_p(x_1,\cdots,x_k)\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_k)\right]$$
$$=\sum_{p=0}^{\infty}p!\int\cdots\int f_p(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_p)g_p(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_p)$$
$$\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_k)\mu(dy_1)\cdots\mu(dy_p)$$

となる。

2. *Stochastic derivatives*. $F\in\mathcal{H}(\Omega)$ とする。μ-a.e. x に対し級数

$$\sum_{p=1}^{\infty}p\int\cdots\int f_p(x,y_1,\cdots,y_{p-1})W(dy_1)\cdots W(dy_{p-1})$$

が $\mathcal{H}(\Omega)$ で収束するとき, これを F の stochastic derivative と言い $\mathcal{D}F$ あるいは $[\mathcal{D}F](x)$ と表わす。$\mathcal{D}$ が linear なことは明らか。

また, $F(x_1,\cdots,x_k)\in\mathcal{H}(X^k\times\Omega)$ とすると μ^k-a.e. $(x_1,\cdots,x_k)$ に対して $F(x_1,\cdots,x_k)\in\mathcal{H}(\Omega)$ であり, $\mathcal{D}F$ が定義可能となる。さらに高階の stochastic derivative も

$$\mathcal{D}^jF=\mathcal{D}(\mathcal{D}^{j-1}F)\qquad(\mathcal{D}^0F=F)$$

により定義できる(もちろん右辺が意味をもつときのみ)。このとき $\mathcal{D}^j F$ は次のように表わされる。

$$[\mathcal{D}^j F](x_1,\cdots,x_k;x_{k+1},\cdots,x_{k+j})$$
$$=\sum_{p=j}^{\infty}\frac{p!}{(p-j)!}\int\cdots\int f_p(x_1,\cdots,x_k;x_{k+1},\cdots,x_{k+j},y_1,\cdots,y_{p-j})$$
$$W(dy_1)\cdots W(dy_{p-j}).$$

3. $l=0,1,2,\cdots$ に対して

$$\mathcal{H}^{(l)}(X^k\times\Omega)=\{F\in\mathcal{H}(X^k\times\Omega):\mathcal{D}^jF \text{ が定義され}, $$
$$\mathcal{D}^jF\in\mathcal{H}(X^{k+j}\times\Omega),\ j=0,1,\cdots,l\},$$
$$\mathcal{H}^{(\infty)}(X^k\times\Omega)=\bigcap_{l=0}^{\infty}\mathcal{H}^{(l)}(X^k\times\Omega).$$

とおく。$\mathcal{H}^{(l)}(X^k\times\Omega)$ は内積

$$(F,G)_{\mathcal{H}^{(l)}(X^k\times\Omega)}=\sum_{j=0}^{l}(\mathcal{D}^jF,\mathcal{D}^jG)_{\mathcal{H}(X^{k+j}\times\Omega)}$$
$$=\sum_{j=0}^{l}\sum_{p=j}^{\infty}\frac{p!}{(p-j)!}E[\int\cdots\int F_pG_p\,\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_k)]$$
$$=\sum_{j=0}^{l}\sum_{p=j}^{\infty}\frac{p!}{(p-j)!}p!\int\cdots\int f_pg_p\,\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_k)\mu(dy_1)\cdots\mu(dy_p)$$

で Hilbert space となる(complete なことは次の Prop. による)。この内積から導かれる norm を $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^{(l)}(X^k\times\Omega)}$ で表わす。

4. <u>Prop.</u> $F\in\mathcal{H}(X^k\times\Omega)$, $F^{(n)}\in\mathcal{H}^{(1)}(X^k\times\Omega)$ $(n=1,2,\cdots)$ とする。$F^{(n)}\to F$ in $\mathcal{H}(X^k\times\Omega)$ $(n\to\infty)$ および $\exists\,G\in\mathcal{H}(X^{k+1}\times\Omega)$: $\mathcal{D}F^{(n)}\to G$ in $\mathcal{H}(X^{k+1}\times\Omega)$ $(n\to\infty)$ とする。このとき, $F\in\mathcal{H}^{(1)}(X^k\times\Omega)$, $\mathcal{D}F=G$ および $F^{(n)}\to F$ in $\mathcal{H}^{(1)}(X^k\times\Omega)$ $(n\to\infty)$ が成り立つ。

Proof. は Ito-Wiener 展開による.

5. Notations.

$P=(P_1,\cdots,P_m)$, $|P|=P_1+\cdots+P_m$, $P!=P_1!\cdots P_m!$

$\mathbb{t}=(t_1,\cdots,t_m)$

$\varphi=\{\varphi_n\}$: CONS in $L^2(X)$

$\varphi^{\otimes P}(x_1,\cdots,x_{|P|})=\varphi_1^{\hat{\otimes}P_1}\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}\varphi_m^{\hat{\otimes}P_m}(x_1,\cdots,x_{|P|})$

$\Phi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ として

$$\Phi(\int\varphi\,dW)=\Phi(\int\varphi_1(x_1)W(dx_1),\cdots,\int\varphi_m(x_m)W(dx_m)).$$

6. Prop. 1) $\Phi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ を高々多項式の order とすると

$$\Phi(\int\varphi\,dW)=\sum_P\frac{1}{P!}\int_{\mathbb{R}^m}\Phi(-\mathbb{t})\frac{\partial^{|P|}}{\partial\mathbb{t}^P}e^{-\frac{(\mathbb{t},\mathbb{t})}{2}}d\mathbb{t}\cdot(2\pi)^{-\frac{m}{2}}\int\cdots\int\varphi^{\otimes P}(x_1,\cdots,x_{|P|})W(dx_1)\cdots W(dx_{|P|}).$$

2) $\Phi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ および $\frac{\partial}{\partial t_i}\Phi$, $i=1,\cdots,m$, が高々多項式の order とする。このとき $\Phi(\int\varphi\,dW)\in\mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ で

$$[\mathfrak{D}\Phi(\int\varphi\,dW)](x)=\sum_{i=1}^m\frac{\partial}{\partial t_i}\Phi(\int\varphi\,dW)\cdot\varphi_i(x).$$

Proof. 1) Ito-Wiener 展開したときの係数を, Hermite 多項式の性質を用いて計算する. 2) 1) と 4. Prop. による.

7. $\mathcal{H}^{(\alpha)}(X^k\times\Omega)$ の dense sets.

Prop. 1) $\{\Phi(\int\varphi\,dW)\,;\,\Phi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ は多項式, $m=1,2,\cdots\}$

は dense in $\mathcal{H}^{(\ell)}(\Omega)$ ($\ell=0,1,2,\cdots$).

2) 1)で $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ としてよい。

3) $\{\psi(x_1,\cdots,x_k)\Phi(\int \varphi dW)$; $\psi \in L^2(X^k)$ は bounded, $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, $m=1,2,\cdots\}$ の linear span は dense in $\mathcal{H}^{(\ell)}(X^k \times \Omega)$.

Proof. 1) 任意の $F \in \mathcal{H}^{(\ell)}(\Omega)$ に対して Hermite 多項式を使うことにより $\mathcal{H}^{(\ell)}(\Omega)$ における近似列が構成できる。2) Φ を多項式とするとき $\Phi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ で $\Phi_n(\int \varphi dW) \to \Phi(\int \varphi dW)$ in $\mathcal{H}^{(\ell)}(\Omega)$ となるものが取れる。3) 明らか。

8. Prop. $\Phi : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ および $\frac{\partial}{\partial t_j}\Phi$, $j=1,\cdots,r$ が bounded とし, $F^{(j)} \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$, $j=1,\cdots,r$ とする。このとき $\Phi(F^{(1)},\cdots,F^{(r)}) \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ で

$$[\mathfrak{D}\Phi(F^{(1)},\cdots,F^{(r)})](x) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial}{\partial t_j}\Phi(F^{(1)},\cdots,F^{(r)})\cdot[\mathfrak{D}F^{(j)}](x).$$

Proof. 7. Prop. 2), 6. Prop. 2) および 4. Prop. による。

Cor. 1 $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^r)$ で $F^{(j)} \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$, $j=1,\cdots,r$ が bounded とすれば Prop. と同じことが言える。特に, $F, G \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ が bounded ならば $FG \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ で

$$[\mathfrak{D}(FG)](x) = [\mathfrak{D}F](x)\cdot G + F\cdot[\mathfrak{D}G].$$

Cor. 2 Prop. で $F^{(j)} \in \mathcal{H}^{(1)}(X^k \times \Omega)$, $j=1,\cdots,r$ とすれば $\Phi(F^{(1)},\cdots,F^{(r)}) \in \mathcal{H}^{(1)}(X^k \times \Omega)$ となり, 同様の公式が成り立つ。

9. <u>Prop.</u> 1) $F, G \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ とし, G, $\int \{[\mathfrak{D}G](x)\}^2 \mu(dx) \in L^\infty(\Omega)$ とすると $FG \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ で

$$[\mathfrak{D}(FG)](x) = [\mathfrak{D}F](x)\cdot G + F\cdot[\mathfrak{D}G](x).$$

2) $F \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$, $G \in \mathcal{H}^{(1)}(X\times\Omega)$ とし, $\int G^2(x)\mu(dx)$, $\iint \{[\mathfrak{D}G](x;y)\}^2 \mu(dx)\mu(dy) \in L^\infty(\Omega)$ とすると $FG \in \mathcal{H}^{(1)}(X\times\Omega)$ で

$$[\mathfrak{D}(FG(x))](y) = [\mathfrak{D}F](y)\cdot G(x) + F\cdot[\mathfrak{D}G](x;y).$$

<u>Proof.</u> 1) 7. Prop. 2) より $\exists$ bounded $F^{(n)} \to F$ in $\mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ $(n\to\infty)$. $F^{(n)}G \to FG$ in $\mathcal{H}(\Omega)$ で, 一方, 8. Cor. 1 より

$$[\mathfrak{D}(F^{(n)}G)](x) = [\mathfrak{D}F^{(n)}](x)\cdot G + F^{(n)}\cdot[\mathfrak{D}G](x).$$

右辺オ一項 $\to [\mathfrak{D}F](x)\cdot G$, オ二項 $\to F\cdot[\mathfrak{D}G](x)$ in $\mathcal{H}(X\times\Omega)$ だから 4. Prop. より. 2) も同様.

<u>10. Prop.</u> $f \in L^2(X)$, $G \in \mathcal{H}^{(1)}(X\times\Omega)$ とすると $\int f(x)G(x)\mu(dx) \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ で

$$[\mathfrak{D}(\int f(x)G(x)\mu(dx))](y) = \int f(x)[\mathfrak{D}G](x;y)\mu(dx).$$

11. $F \in \mathcal{H}_p(\Omega)$, $G \in \mathcal{H}_q(\Omega)$ に対して

$$F\hat{\otimes}G = \int\cdots\int \frac{1}{(p+q)!}\sum_\sigma f_p(y_{\sigma(1)},\cdots,y_{\sigma(p)})\, g_q(y_{\sigma(p+1)},\cdots,y_{\sigma(p+q)})\, W(dy_1)\cdots W(dy_{p+q})$$

とおく。 $F \in \mathcal{H}_p(X^{k+l}\times\Omega)$, $G \in \mathcal{H}_q(X^k\times\Omega)$ ならば §1. 4. 2) より $\int\cdots\int F(x_1,\cdots,x_{k+l})\hat{\otimes}G(x_1,\cdots,x_k)\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_k) \in \mathcal{H}_{p+q}(X^l\times\Omega)$.

Prop. 1) $F \in \mathcal{H}^{(q+r)}(X^{k+\ell}\times\Omega)$, $G \in \mathcal{H}_q(X^k\times\Omega)$とする。
このとき $\sum_{p=0}^{\infty}\int\cdots\int F_p(x_1,\cdots,x_\ell, y_1,\cdots,y_k)\hat{\otimes}G(y_1,\cdots,y_k)\mu(dy_1)\cdots\mu(dy_k)$
は$\mathcal{H}^{(r)}(X^\ell\times\Omega)$で収束する(この和を$\int\cdots\int F(x_1,\cdots,x_\ell, y_1,\cdots,y_k)\hat{\otimes}$
$G(y_1,\cdots,y_k)\mu(dy_1)\cdots\mu(dy_k)$で表わす)。さらに,

$$\left\|\int\cdots\int F(x_1,\cdots,x_\ell,y_1,\cdots,y_k)\hat{\otimes}G(y_1,\cdots,y_k)\mu(dy_1)\cdots\mu(dy_k)\right\|_{\mathcal{H}^{(r)}(X^\ell\times\Omega)}$$
$$\leqq C_{q,r}\|F\|_{\mathcal{H}^{(q+r)}(X^{k+\ell}\times\Omega)}\|G\|_{\mathcal{H}(X^k\times\Omega)}.$$

2) $F \in \mathcal{H}^{(q+r)}(X^\ell\times\Omega)$, $G \in \mathcal{H}_q(\Omega)$とする。このとき

$$F(x_1,\cdots,x_\ell)G$$
$$=\sum_{j=0}^{q}\frac{1}{j!}\int\cdots\int[\mathcal{D}^jF](x_1,\cdots,x_\ell;y_1,\cdots,y_j)\hat{\otimes}[\mathcal{D}^jG](y_1,\cdots,y_j)$$
$$\mu(dy_1)\cdots\mu(dy_j),$$

$$\|FG\|_{\mathcal{H}^{(r)}(X^\ell\times\Omega)}\leqq C_{q,r}\|F\|_{\mathcal{H}^{(q+r)}(X^\ell\times\Omega)}\|G\|_{\mathcal{H}(\Omega)}.$$

§3. Extended Ito integrals.

1. Th. $F \in \mathcal{H}^{(\ell+m)}(X^{k+m}\times\Omega)$ $(\ell\geqq 0, m\geqq 1, k\geqq 0)$とする。

$$\tilde{f}_p(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_{m+p})$$
$$=\frac{1}{(m+p)!}\sum_{\sigma}f_p(x_1,\cdots,x_k,y_{\sigma(1)},\cdots,y_{\sigma(m)};y_{\sigma(m+1)},\cdots,y_{\sigma(m+p)})$$

とおくと,級数

$$\sum_{p=0}^{\infty}\int\cdots\int\tilde{f}_p(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_{m+p})W(dy_1)\cdots W(dy_{m+p})$$

は$\mathcal{H}^{(\ell)}(X^k\times\Omega)$において収束する。その limit をFの extended Ito integral (E.I.I.)と言い,$\dot{\int}\cdots\dot{\int}F(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_m)$
$W(dy_1)\cdots W(dy_m)$, $J_{y_1,\cdots,y_m}F$などと表わす。さらに,

$$\left\| \dot{\int}\cdots\dot{\int} F(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_m)W(dy_1)\cdots W(dy_m) \right\|_{\mathcal{H}^{(\ell)}(X^k\times\Omega)}$$
$$\leq C_{\ell,m}\|F\|_{\mathcal{H}^{(\ell+m)}(X^{k+m}\times\Omega)}.$$

Proof. 級数の各項の$\mathcal{H}^{(\ell)}(X^k\times\Omega)$-normを評価する。

2. E.I.I.の性質.

1)明かにlinear.

2) $\widehat{F}(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_m)=\frac{1}{m!}\sum_\sigma F(x_1,\cdots,x_k,y_{\sigma(1)},\cdots,y_{\sigma(m)})$

とすれば

$$\dot{\int}\cdots\dot{\int} F(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_m)W(dy_1)\cdots W(dy_m)$$
$$=\dot{\int}\cdots\dot{\int}\widehat{F}(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_m)W(dy_1)\cdots W(dy_m).$$

3) $\ell=0$, $m=1$のとき$C_{0,1}=1$と取れる。また,この場合に等号が成り立つための必要十分条件は$\forall p$で

$$f_p(x_1,\cdots,x_k,y_1;y_2,\cdots,y_{p+1})=\widehat{f}_p(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_{p+1})$$

が成り立つこと。

4)(E.I.I.に対するFubini型公式)

$$\dot{\int}\cdots\dot{\int} F(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_m)W(dy_1)\cdots W(dy_m)$$
$$=\dot{\int}W(dy_1)\dot{\int}W(dy_2)\cdots\dot{\int}F(x_1,\cdots,x_k;y_1,\cdots,y_m)W(dy_m).$$

3. $\mathfrak{D}$と$\mathfrak{J}$の関係.

Prop.1 $F\in\mathcal{H}^{(1)}(X^{k+1}\times\Omega)$, $G\in\mathcal{H}^{(1)}(X^k\times\Omega)$とすると

$$\left(\dot{\int}F(\cdot,x_{k+1})W(dx_{k+1}),G\right)_{\mathcal{H}(X^k\times\Omega)}=(F,\mathfrak{D}G)_{\mathcal{H}(X^{k+1}\times\Omega)}.$$

<u>Cor.</u> $F \in \mathcal{H}^{(1)}(X^2 \times \Omega)$, $g \in L^2(X)$ とすると

$$\dot{\int} W(dy) \int g(x) F(x,y) \mu(dx) = \int \mu(dx) \dot{\int} g(x) F(x,y) W(dy).$$

<u>Prop. 2</u> $F \in \mathcal{H}^{(2)}(X^k \times \Omega)$ とすると

$$[\mathcal{D}(\dot{\int} F(x_1,\cdots,x_k) W(dx_k))](x_1,\cdots,x_{k-1}; x)$$
$$= F(x_1,\cdots,x_{k-1},x) + \dot{\int} [\mathcal{D}F](x_1,\cdots,x_k; x) W(dx_k).$$

4. 部分積分の公式.

<u>Prop.</u> $F \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$, $G \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$, $FG(\cdot) \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$, $F \dot{\int} G(x) W(dx)$, $\int [\mathcal{D}F](x) G(x) \mu(dx) \in \mathcal{H}(\Omega)$ とすると

$$F \dot{\int} G(x) W(dx) = \dot{\int} FG(x) W(dx) + \int [\mathcal{D}F](x) G(x) \mu(dx).$$

<u>Proof.</u> §2, 9. Prop. および 3. Prop. 1 による。

<u>Cor. 1</u> $F \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$, $G \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$, F, $\int G^2(x) \mu(dx)$, $\iint \{[\mathcal{D}G](x;y)\}^2 \mu(dx) \mu(dy) \in L^\infty(\Omega)$ とすると

$$F \dot{\int} G(x) W(dx) = \dot{\int} FG(x) W(dx) + \int [\mathcal{D}F](x) G(x) \mu(dx).$$

<u>Cor. 2</u> $F, G \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$, $\int F^2(x) \mu(dx)$, $\int G^2(x) \mu(dx)$, $\iint \{[\mathcal{D}G](x;y)\}^2 \mu(dx) \mu(dy) \in L^\infty(\Omega)$ とすると

$$F(y) \dot{\int} G(x) W(dx) = \dot{\int} F(y) G(x) W(dx) + \int [\mathcal{D}F](y; x) G(x) \mu(dx).$$

5. $X = [0,1]$ or $\mathbb{R}$, $\mu(dx) = dx$ とする。$F \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$ とすると $a, b \in X$, $a < b$ に対して $1_{(a,b]}(\cdot) F(\cdot) \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$ は明らかだから $\dot{\int} 1_{(a,b]}(y) F(y) W(dy)$ が定義される。これを $\dot{\int}_a^b F(y) W(dy)$

で表わす。$a \leq b \leq c$ に対して明かに

$$\dot{\int}_a^c F(y)W(dy) = \dot{\int}_a^b F(y)W(dy) + \dot{\int}_b^c F(y)W(dy)$$

が成り立つ。また，上で述べた諸公式は $\dot{\int}$ を $\dot{\int}_a^b$ でおきかえても成り立つ。

6. E.I.I. を $\widehat{L}^2(X^m)$ における CONS $\{\varphi_n\}$ で近似する。

$$K_n(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x_1,\cdots,x_m)\varphi_j(y_1,\cdots,y_m)$$

とおく。このとき，

<u>Th.</u> $F \in \mathcal{H}^{(l+m)}(X^{k+m}\times\Omega)$ とする。

$$\lim_{n\to\infty}\int\cdots\int\Big[F(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_m)\hat{\otimes}\int\cdots\int K_n(y_1,\cdots,y_m,z_1,\cdots,z_m)$$
$$W(dz_1)\cdots W(dz_m)\Big]\mu(dy_1)\cdots\mu(dy_m)$$
$$=\dot{\int}\cdots\dot{\int} F(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_m)W(dy_1)\cdots W(dy_m) \quad \text{in } \mathcal{H}^{(l)}(X^k\times\Omega).$$

<u>Proof.</u> は次の Lemma による。

<u>Lem.</u> $F \in \mathcal{H}^{(l+m)}(X^{k+m}\times\Omega)$ に対して

$$F^{(n)}(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_m)$$
$$=\int\cdots\int F(x_1,\cdots,x_k,z_1,\cdots,z_m)K_n(z_1,\cdots,z_m,y_1,\cdots,y_m)\mu(dz_1)\cdots\mu(dz_m)$$

とおくと

1) $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(l+m)}(X^{k+m}\times\Omega)$ で，その kernel

$$f_p^{(n)}(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_m;u_1,\cdots,u_p)$$
$$=\int\cdots\int f_p(x_1,\cdots,x_k,z_1,\cdots,z_m;u_1,\cdots,u_p)K_n(z_1,\cdots,z_m,y_1,\cdots,y_m)$$
$$\mu(dz_1)\cdots\mu(dz_m).$$

2) $\lim_{n\to\infty} F^{(n)} = \widetilde{F}(x_1,\cdots,x_k\,;\,y_1,\cdots,y_m)$ in $\mathcal{H}^{(\ell+m)}(X^{k+m}\times\Omega)$.

3) $\dot{\int}\cdots\dot{\int} F^{(n)}(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_m)W(dy_1)\cdots W(dy_m)$

$= \int\cdots\int[F(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_m)\hat{\otimes}\int\cdots\int K_n(y_1,\cdots,y_m,z_1,\cdots,z_m)$

$W(dz_1)\cdots W(dz_m)]\mu(dy_1)\cdots\mu(dy_m)$.

§4. *-integrals.

1. $\mathcal{L}^0(X\times\Omega)=\{F: X\times\Omega\to\mathbb{R}\,;\,\mathfrak{X}\times\mathcal{F}$-meas., $P(\int F^2(x,\omega)\mu(dx)<\infty)=1\}$とおく。また$\{\varphi_n\}$を$L^2(X)$のCONSとし、

$$K_n(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)\varphi_j(y),$$

$$Z_n(x,\omega)=\int K_n(x,y)W(dy)$$

とおく。$F\in\mathcal{L}^0(X\times\Omega)$に対して

$$\lim_{n\to\infty}\int F(x,\omega)Z_n(x,\omega)\mu(dx)$$

が in probability で存在するとき，Fは$\{\varphi_n\}$に関して*-可積分と言い，このlimitを$\overset{*}{\int}F(x,\omega)W(dx)$，$\mathcal{J}^*F$などで表わす。この積分の形式は小川氏により導入されたものである。

2. $F\in\mathcal{H}^{(1)}(X\times\Omega)$に対して*-可積分であるための条件を調べる。§2, 11. Prop. 2)より

$$\int F(x,\omega)Z_n(x,\omega)\mu(dx)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\int F(x,\omega)\varphi_j(x)\mu(dx)\cdot\int\varphi_j(y)W(dy)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \Big\{ \int F(x,\omega)\varphi_j(x)\mu(dx) \hat{\otimes} \int \varphi_j(y) W(dy)$$
$$+ \iint [\mathfrak{D}F](x;y,\omega)\varphi_j(x)\varphi_j(y)\mu(dx)\mu(dy) \Big\} \ulcorner\mu(dy).$$
$$= \int F(x,\omega) \hat{\otimes} Z_n(x,\omega)\mu(dx) + \iint [\mathfrak{D}F](x;y,\omega)K_n(x,y)\mu(dx)$$

従って，§3, 6. Th. より

Th. $F \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$ が $\{\varphi_n\}$ に関して $*$-可積分となるための必要十分条件は

$$\lim_{n\to\infty} \iint [\mathfrak{D}F](x;y,\omega) K_n(x,y)\mu(dx)\mu(dy)$$

が *in probability* で存在することで，このとき

$$J^*F = JF + \lim_{n\to\infty} \iint [\mathfrak{D}F](x;y,\omega) K_n(x,y)\mu(dx)\mu(dy).$$

§5. The Ito formula for E.I.I.

1. $X = \mathbb{R}$, $\mu(dx) = dx$ とする。

Th. $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$, $F \in \mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R}\times\Omega) \cap L^\infty(\mathbb{R}\times\Omega)$, $G \in \mathcal{H}^{(1)}(\mathbb{R}\times\Omega)$ とし

$$L(x) = \xi + \dot{\int}_a^x F(y)W(dy) + \int_a^x G(y)dy$$

とおく。このとき任意の $\Phi \in C_b^2(\mathbb{R})$ に対して

$$(\star)\quad \Phi(L(\ell)) = \Phi(\xi) + \dot{\int}_a^\ell \Phi'(L(x))F(x)W(dx) + \int_a^\ell \Phi'(L(x))G(x)dx$$
$$+ \frac{1}{2}\int_a^\ell \Phi''(L(x))F^2(x)dx$$
$$+ \int_a^\ell \Phi''(L(x)) \Big\{ [\mathfrak{D}\xi](x) + \dot{\int}_a^x [\mathfrak{D}F](y;x)W(dy)$$
$$+ \int_a^x [\mathfrak{D}G](y;x)dy \Big\} F(x)dx.$$

Proof. は以下の *lemmas* による。

<u>Lem.1</u> $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$, $F \in \mathcal{H}^{(2)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\int_{-\infty}^{\infty}\{[\mathfrak{D}F](x)\}^2 dx \in L^\infty(\Omega)$, $G \in \mathcal{H}^{(1)}(\mathbb{R}\times\Omega)$とし

$$L(x) = \xi + \int_a^{\bullet x} F\, W(dy) + \int_a^x G(y)\,dy$$

とおく。このとき任意の$\Phi \in C_b^3(\mathbb{R})$に対して、(☆)において$F(x)$を$F$で、$[\mathfrak{D}F](y;x)$を$[\mathfrak{D}F](x)$でおきかえた式が成り立つ。

<u>Lem.2</u> Lem.1において$\Phi \in C_b^3(\mathbb{R})$は$\Phi \in C_b^2(\mathbb{R})$としてよい。

<u>Lem.3</u> 1) Th.の仮定の下で、(☆)の各項はすべて$\mathcal{H}(\Omega)$に属する。

2) $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R}\times\Omega) \cap L^\infty(\mathbb{R}\times\Omega)$, $n = 1, 2, \cdots$, が存在して $F^{(n)} \to F$ in $\mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R}\times\Omega)$, また各$F^{(n)}$に対して

$$L^{(n)}(x) = \xi + \int_a^{\bullet x} F^{(n)}(y)\, W(dy) + \int_a^x G(y)\,dy$$

とおくとき

$$\begin{aligned}\Phi(L^{(n)}(b)) = \Phi(\xi) &+ \int_a^{\bullet b} \Phi'(L^{(n)}(x))F^{(n)}(x)W(dx) \\ &+ \int_a^b \Phi'(L^{(n)}(x))G(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b \Phi''(L^{(n)}(x))(F^{(n)})^2(x)\,dx \\ &+ \int_a^b \Phi''(L^{(n)}(x))\Big\{[\mathfrak{D}\xi](x) + \int_a^{\bullet x}[\mathfrak{D}F](y;x)W(dy) \\ &\qquad + \int_a^x [\mathfrak{D}G](y;x)\,dy\Big\} F^{(n)}(x)\,dx\end{aligned}$$

が成り立つならば(☆)が成り立つ。

<u>Lem.4</u> Lem.2において$\int_{-\infty}^{\infty}\{[\mathfrak{D}F](x)\}^2 dx \in L^\infty(\Omega)$の条件は省くことができる。

<u>Lem.5</u> $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$, $F^{(j)} \in \mathcal{H}^{(2)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $j = 1, \cdots, n$, $G \in \mathcal{H}^{(1)}(\mathbb{R}\times\Omega)$とし、

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} 1_{(x_{j-1}, x_j]}(x) F^{(j)} \quad (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$$

$$L(x) = \xi + \int_a^x F(y) W(dy) + \int_a^x G(y) dy$$

とおく。このとき任意の$\Phi \in C_b^2(\mathbb{R})$に対して(☆)が成り立つ。

§6. Duality.

1. $\mathcal{H}^{(\ell)}(X^k \times \Omega)$について。§2, 3のことから$\mathcal{H}^{(\infty)}(X^k \times \Omega)$はcountably Hilbert spaceとなる。$\mathcal{H}^{(\ell)}(X^k \times \Omega)$のdual spaceを$\mathcal{H}^{(-\ell)}(X^k \times \Omega)$で，そこでのnormを$\|\cdot\|_{\mathcal{H}^{(-\ell)}(X^k \times \Omega)}$で表わす。

$$\mathcal{H}^{(\infty)}(X^k \times \Omega) \subset \cdots \subset \mathcal{H}^{(\ell+1)}(X^k \times \Omega) \subset \mathcal{H}^{(\ell)}(X^k \times \Omega) \subset \cdots$$

$$\cdots \subset \mathcal{H}(X^k \times \Omega) \subset \cdots \subset \mathcal{H}^{(-\ell)}(X^k \times \Omega) \subset \mathcal{H}^{(-\ell-1)}(X^k \times \Omega) \subset \cdots$$

で，$\mathcal{H}^{(\infty)}(X^k \times \Omega)$のdual space

$$\mathcal{H}^{(-\infty)}(X^k \times \Omega) = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{H}^{(-\ell)}(X^k \times \Omega)$$

となることはよく知られている。また，定義より，

$$\|H\|_{\mathcal{H}^{(-\ell)}(X^k \times \Omega)} = \sup_{\|F\|_{\mathcal{H}^{(\ell)}(X^k \times \Omega)} = 1} \langle H, F \rangle.$$

ここで$\langle H, F \rangle$はdualityに関するbilinear formで，$H \in \mathcal{H}(X^k \times \Omega)$ならば明かに

$$\langle H, F \rangle = (H, F)_{\mathcal{H}(X^k \times \Omega)}.$$

2. $F \in \mathcal{H}(X \times \Omega)$, $G \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$とする。$\mathfrak{D} : \mathcal{H}^{(1)}(\Omega) \to \mathcal{H}(X \times \Omega)$はcont. linearだから$G \longmapsto (F, \mathfrak{D}G)_{\mathcal{H}(X \times \Omega)}$は$\mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$上のcont. linear functionalとなる。従って

$$^{\exists}H \in \mathcal{H}^{(-1)}(\Omega) : (F, \mathfrak{D}G)_{\mathcal{H}(X\times\Omega)} = \langle H, G \rangle,$$

即ち, $\exists$ cont. linear op. $J : \mathcal{H}(X\times\Omega) \to \mathcal{H}^{(-1)}(\Omega)$ s.t.

$$(F, \mathfrak{D}G)_{\mathcal{H}(X\times\Omega)} = \langle JF, G \rangle, \quad \forall G \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega).$$

このJFのことをE.I.I.と呼び, $\dot{\int} F(x)W(dx)$とも表わす。ここで§3で用いたのと同じ記号を使うことは次のProp.により正当化される.

<u>Prop.</u> $F \in \mathcal{H}^{(1)}(X\times\Omega)$に対しては, 上で定義したE.I.I.と§3で定義したものは一致する。

3. Ito積分との関連について述べる。$X = [0, 1]$, $\mathfrak{X} = \mathcal{B}([0, 1])$ $\mu(dx) = dx$とする。即ちWは1次元B.M. $\{B(x); 0 \leqq x \leqq 1\}$から導かれるものとする。$\mathcal{F}_x = \sigma\{B(y); 0 \leqq y \leqq x\}$とおく。

<u>Prop.</u> $F \in \mathcal{H}(X\times\Omega)$が$\mathcal{F}_x$-adaptedならば$\dot{\int} F(x)W(dx)$は通常のIto積分$\int_0^1 F(x)dB(x)$と一致する。

従って, $\dot{\int}_a^b F(x)W(dx) = \dot{\int} 1_{(a,b]}(x)F(x)W(dx)$に対しても

$$\dot{\int}_a^b F(x)W(dx) = \int_a^b F(x)dB(x)$$

が成り立つ。

§5.1.Th.においてξ: $\mathcal{F}_0$-adapted, F, G: $\mathcal{F}_x$-adaptedとする。このとき(※)において右辺の最終項＝0となることは容易に示すことができる。従ってこの場合(※)は通常のItoの公式に他ならないことがわかる。

REFERENCES

[1] Yu.Daletskii and S.N.Paramonova, Stochastic integrals with respect to a normally distribted additive set function, Soviet Math. Dokl.,14(1973),96-99.

[2] Yu.Daletskii and S.N.Paramonova, On a formula from the theory of Gaussian measures and on the estimation of stochastic integrals, Theory Prob. Appl.,19(1974),812-817.

[3] M.Hitsuda, Formula for Brownian partial derivatives, Second Japan-USSR symposium on probability theory,Kyoto,(1972), 111-114.

[4] K.Ito, Multiple Wiener integral, J.Math.Soc.Japan,3(1951), 157-169.

[5] S.Ogawa, Quelques proprietes de l'integrale stochastique du type noncausal,(to appear in Japan J. Appl. Math.)

[6] A.Ju.Seveljakov, Stochastic differentiation and integration of functinals of a Wiener process, Teor. Slucainyh Processov,6(1978),123-131.

[7] A.Ju.Seveljakov, The Ito formula for the extended stochastic integral, Theory Prob. and Statist.,22(1981),163-174.

[8] A.V.Skorokhod, On a generalization of a stochastic integral, Theory Prob. Apll.,20(1975),219-233.

[9] M.A.Berger and V.J.Mizel, Theorems of Fubini type for iterated stochastic integrals, Bull.Amer.Math.Soc.,252(1979),249-274.

[10] M.A.Berger and V.J.Mizel, An extention of the stochastic integrals, Ann.of Prob.,10(1982),435-450.